

УДК 593.3

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В ВОЛНОВОДЕ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАКРЫТЫМИ ИЛИ ОТКРЫТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Аветисян А.С., Мкртчян С.А.

Ключевые слова: электроакустическая волна, пьезоэлектрическое полупространство, краевая задача, высокочастотная акустическая волна, электрически прозрачная поверхность, электрически экранированная поверхность, дисперсионное уравнение, частотная зависимость.

Ավետիսյան Ա.Ս., Մկրտչյան Ս.Հ.

Ռելեյի էլեկտրաառաձգական ալիքները էլեկտրականապես բաց կամ փակ մակերևույթներով ալիքատարում

Բանալի բառեր: էլեկտրաառաձգական ալիք, պլեզոէլեկտրական կիսատարածություն, եզրային խնդիր, բարձր հաճախակային էլեկտրաձայնային ալիք, էլեկտրաթափանցիկ մակերևույթ, էլեկտրափակ մակերևույթ, դիսպերսիոն հավասարում, հաճախակային կախվածություն:

Հետազոտվում են պլեզոէլեկտրական կիսատարածությունում հարթ դեֆորմացիայի էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածման օրինաչափությունները: Ցույց է տրվում՝ էլեկտրաառաձգականության եզրային խնդրի քանի տարբերակ կարելի է ձևակերպել հեքսագոնալ համաչափության $\bar{6}m2$ դասի պլեզոէլեկտրաէլաստիկ կիսատարածությունում:

Մեխանիկական բեռից ազատ պլեզո-կիսատարածության մակերևույթին տարբեր էլեկտրական եզրային պայմանների դեպքում, քննարկված է հարթ դեֆորմացիայի բարձր հաճախության էլեկտրաձայնային ալիքի տարածման խնդիրը: Որոշ էլեկտրական մակերևույթային պայմանների դեպքում ցույց է տրված հարթ դեֆորմացիայի ալիքի տեղայնացման նոր հնարավորությունը: Հարթ դեֆորմացիայի ալիքն ուղեկցող էլեկտրական դաշտի տատանումների առկայությունը բերում է Ռելեյի էլեկտրաառաձգական ալիքի տեղայնացման բնութագրիչների քանակական և որակական փոփոխությունների:

Avetisyan A.S., Mkrtychyan S.H.

The electro elastic Rayleigh waves in the waveguide with an electrically closed or open surfaces

Keywords: Electro-acoustic waves; piezoelectric half-space; boundary value problem; high frequency acoustic waves; electrically transparent surface; electrically screened surface; dispersion equation; frequency dependence.

The patterns of propagation of electro-acoustic waves of plane strain in a piezoelectric half-space is examined. In paper is shows how many possible variants of the boundary value problem of electro-elasticity can be formulated in a piezoelectric half-space of piezoelectric crystal class $\bar{6}m2$ of the hexagonal symmetry. The problem of propagation of high frequency acoustic waves of plane strain (electro-acoustic Rayleigh waves) at different electric boundary conditions for mechanically free surface of a piezoelectric half-space is discussed. The possibility of a new localization of wave's plane strain, under certain electrical conditions at a surface is shown. The presence of a concomitant fluctuations of electric field, the waves of plane strain giving to the results in both quantitative and qualitative changes of the characteristics of a localization of electro-acoustic Rayleigh waves.

Исследуются закономерности распространения электроакустической волны плоской деформации в пьезоэлектрическом полупространстве. Показывается, сколько вариантов краевой задачи электроупругости можно сформулировать в пьезоэлектрическом полупространстве из пьезокристалла класса $\bar{6}m2$, гексагональной симметрии. Обсуждена задача распространения высокочастотных электроакустических волн плоской деформации (электроакустические волны типа Рэлея) при разных электрических граничных условиях на механически свободной поверхности пьезо-полупространства. Показана возможность новой локализации волн плоской деформации при определённых электрических поверхностных условиях. Наличие сопутствующих волн плоской деформации колебаний электрического поля приводит как к количественному, так и к качественному изменению характеристик локализации электроакустических волн Рэлея.

Введение.

Возможная локализация волновой энергии вблизи механически свободной поверхности упругого тела из изотропного материала была обнаружена ещё в 1885г. Рэлеем [1]. Это была волна плоской деформации (PV – волна). Однако, механически свободная поверхность не допускает локализацию энергии чисто сдвиговой упругой волны антиплоской деформации (SH – волна). Блюстейном в 1968г. было показано [2], что локализация энергии, горизонтально поляризованной SH волны при механически свободной поверхности упругого тела возможна в пьезоэлектрической среде определённой симметрии (класс $6mm$ гексагональной симметрии).

До сих пор интересны и разными авторами исследуются явления, связанные с распространением электроактивной волны антиплоской деформации в неоднородных структурах (в материалах с переменными характеристиками), или при разных электромеханических поверхностных условиях [3÷11] и др.

Еще в 1985 году было показано [12], что условия разделения плоского и антиплоского полей деформации в пьезоэлектрических кристаллах однозначно определяются структурой общей матрицы физико-механических постоянных материала (матриц упругих и пьезоэлектрических постоянных, диэлектрической проницаемости). Выведены системы разделённых квазистатических уравнений. Причём, показано, что электрическое поле участвует только в одном из разделённых полей деформаций. Несмотря на это, электроупругие волны плоской деформации (электроакустические волны Рэлея) в пьезоэлектрических кристаллах сравнительно мало исследованы [13÷15] и др.

Наряду с этим, ещё бурно исследуются особенности локализации волн Рэлея в трёхмерных задачах упругости [16, 17], явления, связанные с анизотропией материала [18, 19], или с неоднородностью структуры [20, 21].

В настоящей работе исследуется влияние разных электрических поверхностных условий на распространение высокочастотной волны электроактивной плоской деформации в зависимости от характера связи электромеханических полей.

Основные соотношения и постановка задачи.

Материальные уравнения пьезоэлектрической среды в декартовой системе координат $\{x_i\}$ записываются в виде

$$D_m = e_{mnk} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \varepsilon_{mk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}; \quad \sigma_{ij} = c_{ijnk} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + e_{mij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}. \quad (1.1)$$

Для соблюдения однозначности, в декартовой системе координат $\{x_i\}$ совмещена с физическими координатами анизотропии кристаллов $\{x_\alpha; x_\beta; x_\gamma\}$, где $\{\alpha; \beta; \gamma\} \in \{1; 2; 3\}$ $\alpha \neq \beta; \gamma \neq \alpha; \beta \neq \gamma$ и что при данной анизотропии пьезокристалла, ось ox_γ параллельна оси инверсии (или симметрии) кристалла $\bar{p} \parallel ox_\gamma$. Тогда, в случае однородной среды [12] условия разделения плоской и антиплоской полей упругих деформаций получаются на основе анализа квази-статических уравнений электроупругости:

$$c_{ijnk} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_k} + e_{mij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$e_{mij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon_{mj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_j} = 0 \quad (1.3)$$

по структуре общего тензора физико-механических постоянных материала:

$$\left(\begin{array}{cccccc} (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & \hat{c}_{ijnk} - 6 \times 6 & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} (* & * & *) \\ (* & * & *) \\ (* & e_{ijm} & *) \\ (* & 3 \times 6 & *) \\ (* & * & *) \\ (* & * & *) \end{array} \right) \quad (1.4)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & e_{mij} - 6 \times 3 & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} (* & * & *) \\ (* & \varepsilon_{nk} & *) \\ (* & 3 \times 3 & *) \end{array} \right)$$

Из соотношений (1.1)-(1.4) видно, что если в чисто упругой среде разделение плоского $\{u_\alpha(x_\alpha; x_\beta; t); u_\beta(x_\alpha; x_\beta; t); 0\}$ и антиплоского $\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ полей деформации определяется только структурой матрицы упругих постоянных материала $\hat{c}_{ijnk} - (6 \times 6)$ и, возможно, при

$$c_{\alpha\beta\beta\beta} = c_{\alpha\beta\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma\gamma} = c_{\alpha\gamma\beta\beta} = c_{\alpha\gamma\beta\gamma} = c_{\alpha\gamma\gamma\gamma} \equiv 0, \quad (1.5)$$

то условия разделения этих полей деформаций в пьезоэлектрических кристаллах однозначно определяются структурой общей матрицы физико-механических постоянных материала ($\hat{c}_{ijnk} - (6 \times 6)$, $e_{ijm} - (3 \times 6)$ и $\varepsilon_{nk} - (3 \times 3)$).

Получается, что разделение электроактивного плоского $\{u_\alpha(x_\alpha; x_\beta; t); u_\beta(x_\alpha; x_\beta; t); 0; \varphi(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ от чисто упругого антиплоского $\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ полей деформации возможно при выполнении наряду с (1.5) также условий:

$$e_{\beta\alpha\beta} = e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\gamma\alpha\gamma} = e_{\gamma\alpha\beta} \equiv 0. \quad (1.6)$$

Разделение же электроактивного антиплоского $\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha; x_\beta; t); \varphi(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ от чисто упругого плоского $\{u_\alpha(x_\alpha; x_\beta; t); u_\beta(x_\alpha; x_\beta; t); 0\}$ полей деформации возможно при выполнении наряду с (1.5) также условий:

$$e_{\alpha\alpha\alpha} = e_{\alpha\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\beta} = e_{\beta\beta\beta} = e_{\beta\beta\alpha} = e_{\beta\alpha\alpha} \equiv 0. \quad (1.7)$$

В соотношениях (1.5)÷(1.7) индексы появляются в любом сочетании $\{\alpha; \beta; \gamma\} \Leftrightarrow \{1; 2; 3\}$, не повторяясь $\alpha \neq \beta$; $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

Очевидно, что в разных кристаллографических сечениях $x_\alpha O x_\beta$ или $x_\beta O x_\gamma$, или $x_\gamma O x_\alpha$ системы разделённых квазистатических уравнений по структуре разные [12]. Наипростейшая связь электрического и упругого полей при электроактивной плоской деформации получается в кристаллографическом сечении $x_3 O x_1$ кристаллов класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии в виде $\{u_1(x_1; x_3; t); 0; u_3(x_1; x_3; t); \varphi(x_1; x_3; t)\}$, а $u_2(x_1; x_3; t) \equiv 0$ и $\partial/\partial x_2 \equiv 0$. Участвующие в задаче плоской деформации ненулевые характеристики электромеханического поля

$$\sigma_{11}(x_1, x_3) = c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad (1.8)$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_3) = c_{44} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right); \quad \sigma_{33}(x_1, x_3) = c_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$D_1(x_1, x_3) = e_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad D_3(x_1, x_3) = -\varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \quad (1.9)$$

приводят к системе квазистатических уравнений:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (c_{44} + c_{13}) \frac{\partial u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (c_{44} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
e_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} &= 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

или в кристаллографическом сечении $x_1 O x_2$, кристаллов того же класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии в виде $\{u_1(x_1; x_2; t); u_2(x_1; x_2; t); 0; \varphi(x_1; x_2; t)\}$, а $u_3(x_1; x_2; t) \equiv 0$ и $\partial/\partial x_3 \equiv 0$. В этом случае кристаллографической поляризации, участвующие в задаче плоской деформации, ненулевые характеристики электромеханического поля

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(x_1, x_2) &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; & \sigma_{22}(x_1, x_2) &= c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \\
\sigma_{12}(x_1, x_2) &= \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + e_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$D_1(x_1, x_2) = e_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - e_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad D_2(x_1, x_2) = e_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \tag{1.12}$$

приводят к другой системе квазистатических уравнений:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \left(\frac{c_{11} + c_{12}}{2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\
c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \left(\frac{c_{11} + c_{12}}{2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\
e_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

1.a. Рассмотрим распространение волны плоской деформации в кристаллографическом срезе $x_3 O x_1$ слоя из пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии. Пьезоэлектрический слой толщиной $2h_0$ отнесён к координатной системе $Oxyz$ так, что $Ox_1 \Leftrightarrow Ox$ – продольная ось слоя, $\bar{y} \parallel Ox_3 \Leftrightarrow Oz$ – поперечная ось слоя, $u_1(x_1; x_3; t) \Leftrightarrow u(x; z; t)$; $u_3(x_1; x_3; t) \Leftrightarrow w(x; z; t)$; $\varphi(x_1; x_3; t) \Leftrightarrow \varphi(x; z; t)$, а слой занимает область $\Omega_0 = \{|x| < \infty; |z| \leq h_0; |y| < \infty\}$

Система квазистатических уравнений (1.10) по введённым обозначениям переписывается в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{41} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial z^2} + \theta_{41}^* \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x \partial z} + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial x^2} &= c_1^{-2} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{34} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial z^2} + \theta_{34}^* \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x \partial z} &= c_2^{-2} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial x^2} + \vartheta_{31} \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial z^2} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

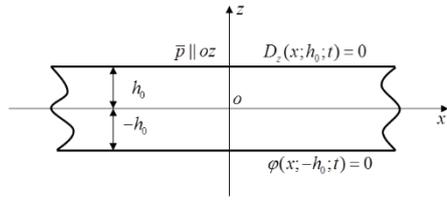
Здесь введены обозначения $\theta_{41} = c_{44}/c_{11}$, $\theta_{41}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{11}$; $\theta_{34} = c_{33}/c_{44}$; $\theta_{34}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{44}$ безразмерных характеристик упругой и $\vartheta_{31} = \varepsilon_{33}/\varepsilon_{11}$ – диэлектрической анизотропии материала.

$c_1 = \sqrt{c_{11}/\rho}$ и $c_2 = \sqrt{c_{44}/\rho}$ – скорости продольной и поперечной упругих объёмных волн, соответственно, без учёта электроактивности материала.

На обеих механически свободных поверхностях волновода $z = \pm h_0$ удовлетворяются условия:

$$\left(c_{13} \frac{\partial u(x; z; t)}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial z} \right)_{z=\pm h_0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u(x; z; t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x} \right)_{z=\pm h_0} = 0 \quad (1.15)$$

Соответственно, на электрически открытой $z = h_0$ и на электрически закрытой $z = -h_0$ поверхностях пьезоэлектрического слоя, условия прозрачности и экранирования электрических сопутствующих колебаний:



$$\begin{aligned} -\varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial z} \Big|_{z=h_0} &= 0, \\ \varphi(x; z; t) \Big|_{z=-h_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Стоит уделить внимание на то, что при таком геометрическом срезе слоя из пьезокристаллической среды связь электрического и упругого полей плоской деформации выделяется только в первом и третьем уравнениях (1.14). Взаимодействие

Фиг. 1. Поляризованный по толщине пьезоэлектрический слой с электрически открытой $(\partial \varphi(x; z; t)/\partial z)|_{z=h_0} = 0$ и электрически закрытой $\varphi(x; z; t)|_{z=-h_0} = 0$ поверхностями.

этих полей по граничным условиям (1.15) и (1.16) также отсутствует. Фактически, в этом случае сопутствующие электрические колебания прямо связаны только с продольным составляющим упругого перемещения.

В результате, в обоих случаях изменения характеристик электромеханических полей происходит по продольному направлению слоя и, соответственно, имеют характер $(e_{11}/\varepsilon_{11}) \cdot [\partial^2 u(x; z; t)/\partial x^2]$ и $(e_{11}/c_{11}) \cdot [\partial^2 \varphi(x; z; t)/\partial x^2]$. Очевидно, что при неучёте пьезоэффекта у материала $e_{11} \equiv 0$ взаимодействие в граничной задаче исчезает.

1.6. При рассмотрении распространения волны плоской деформации в том же кристаллографическом срезе $x_3 0x_1$, в слое толщиной $2h_0$ из того же пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии, отнесённым уже к координатным осям $oxyz$ так, что слой занимает область $\Omega_1 = \{|x| \leq h_0; |z| < \infty; |y| < \infty\}$. Тогда, $ox_1 \rightleftharpoons ox$ – поперечная ось слоя, $\bar{p} \parallel ox_3 \rightleftharpoons oz$ – продольная ось слоя.

Введя опять в соотношения (1.8)–(1.10) обозначения $u_1(x_1; x_3; t) \rightleftharpoons u(x; z; t)$; $u_3(x_1; x_3; t) \rightleftharpoons w(x; z; t)$; $\varphi(x_1; x_3; t) \rightleftharpoons \varphi(x; z; t)$, в граничной задаче электроупругости совместно с уравнениями (1.14), на механически свободных, электрически прозрачной $x = h_0$ и электрически $x = -h_0$ экранированной поверхностях пьезоэлектрического слоя соответственно будем иметь:

$$\left(c_{11} \frac{\partial u(x; z; t)}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial z} + e_{11} \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=\pm h_0} = 0; \quad (1.17)$$

$$\left(\frac{\partial u(x; z; t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=\pm h_0} = 0.$$

$$\left(e_{11} \frac{\partial u(x; z; t)}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=h_0} = 0; \quad \varphi(x; z; t)|_{x=-h_0} = 0 \quad (1.18)$$

Из сформулированной граничной задачи (1.14), (1.17) и (1.18) уже видно, что в этом случае выбора геометрического среза слоя и того же кристаллографического среза в пьезоэлектрике, связь электрического и упругого полей плоской деформации выделяется не только уравнениями (1.14).

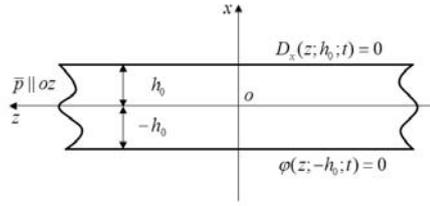
Взаимодействие характеристик электромеханического полей уже происходит не только за счёт наличия слагаемых

$$(e_{11}/\varepsilon_{11}) \cdot [\partial^2 u(x; z; t)/\partial x^2] \quad \text{и} \quad (e_{11}/c_{11}) \cdot [\partial^2 \varphi(x; z; t)/\partial x^2] \quad \text{в уравнениях.}$$

Пьезоэффект в этом случае приводит также к появлению эффективных нагрузок типа $\partial \varphi(x; z; t)/\partial x|_{x=\pm h_0}$ и $\partial u(x; z; t)/\partial x|_{x=h_0}$ в граничных условиях (1.17) и (1.18).

Очевидно, что при неучёте пьезоэлектрического эффекта в материале, когда $e_{11} \equiv 0$, взаимодействие между упругим и электрическим полями в граничной задаче исчезает.

Таким образом, выбор разных геометрических срезов слоя из пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии приводит к принципиально разным математическим граничным задачам электроупругой плоской деформации: уравнения (1.14) вместе с смешанными граничными условиями (1.15) и (1.16) на перпендикулярных к инверсионной оси пьезокристалла $\bar{p} \parallel ox_3 \Leftrightarrow oz$ поверхностях $z = \pm h_0$, или уравнения (1.14) вместе с смешанными граничными условиями (1.17) и



Фиг. 2. Поляризованный по длине пьезоэлектрический слой с электрически открытой $(\partial\varphi(x; z; t)/\partial z)|_{x=h_0} = 0$ и электрически закрытой $\varphi(x; z; t)|_{x=-h_0} = 0$ поверхностями,

(1.18) на параллельных к инверсионной оси пьезокристалла $\bar{p} \parallel ox_3 \Leftrightarrow oz$ поверхностях $x = \pm h_0$.

Аналогичное рассуждение приводит к тому, что электроупругая краевая задача плоской деформации в кристаллографическом сечении $x_1 0x_2$, перпендикулярном к инверсионной оси пьезокристалла того же класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии $\bar{p} \parallel ox_3 \Leftrightarrow oz$, можно сформулировать также двумя разными способами.

Задача в пьезоэлектрическом слое $\Omega_2 = \{|x| \leq h_0; |z| < \infty; |y| < \infty\}$ с механически свободными и соответственно электрически прозрачными и экранированными поверхностями $x = \pm h_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\theta_{12}}{2}\right) \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial y^2} + \left(\frac{1+\theta_{12}}{2}\right) \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial x \partial y} &= c_l^{-2} \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial t^2} \\ \left(\frac{1-\theta_{12}}{2}\right) \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial y^2} + \left(\frac{1+\theta_{12}}{2}\right) \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial x \partial y} + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi(x; y; t)}{\partial y^2} &= c_l^{-2} \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi(x; y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x; y; t)}{\partial y^2} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь введены обозначения безразмерных характеристик упругой анизотропии материала $\theta_{12} = c_{12}/c_{11}$, а $c_l = \sqrt{c_{11}/\rho}$ – скорость продольной упругой объёмной волны без учёта электроактивности материала.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(x; y; t)}{\partial x} + \theta_{12} \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial y}\right)_{x=\pm h_0} &= 0; \\ \left(\left(\frac{1-\theta_{12}}{2}\right) \left(\frac{\partial u(x; y; t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial x}\right) + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi(x; y; t)}{\partial y}\right)_{x=\pm h_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\left(\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial u(x; y; t)}{\partial x} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi(x; y; t)}{\partial x} \right)_{x=h_0} = 0; \quad \varphi(x; y; t)|_{x=-h_0} = 0 \quad (1.21)$$

и краевая задача в пьезоэлектрическом слое $\Omega_3 = \{|x| < \infty; |y| \leq h_0; |z| < \infty\}$ с механически свободными и соответственно электрически прозрачными и экранированными поверхностями $y = \pm h_0$ формулируется как система уравнений (1.19) с граничными условиями:

$$\left(\theta_{12} \frac{\partial u(x; y; t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial y} \right)_{y=\pm h_0} = 0; \quad (1.22)$$

$$\left(\left(\frac{1 - \theta_{12}}{2} \right) \left(\frac{\partial u(x; y; t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial x} \right) + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi(x; y; t)}{\partial y} \right)_{y=\pm h_0} = 0.$$

$$\left(\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \left(\frac{\partial u(x; y; t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi(x; y; t)}{\partial y} \right)_{y=h_0} = 0; \quad \varphi(x; y; t)|_{y=-h_0} = 0 \quad (1.23)$$

В сформулированных граничных задачах (1.19)–(1.21), а также (1.19), (1.22) и (1.23) взаимодействия характеристик электромеханического полей происходит не только за счёт наличия слагаемых $(e_{11}/\varepsilon_{11}) \cdot [\partial^2 v(x; z; t)/\partial y^2]$ и $(e_{11}/c_{11}) \cdot [\partial^2 \varphi(x; z; t)/\partial y^2]$ в уравнениях. Пьезоэффект в этом срезе пьезокристалла приводит также к появлению эффективных нагрузок типа $\partial \varphi(x; z; t)/\partial x|_{x=\pm h_0}, (e_{11}/\varepsilon_{11})(\partial v(x; y; t)/\partial y)_{x=h_0}, (e_{11}/\varepsilon_{11})(\partial u(x; y; t)/\partial y + \partial v(x; y; t)/\partial x)_{y=h_0}$ и $(e_{11}/\varepsilon_{11})(\partial \varphi(x; z; t)/\partial y)|_{x=\pm h_0}$ в граничных условиях (1.20), (1.21), (1.22) и (1.23), соответственно.

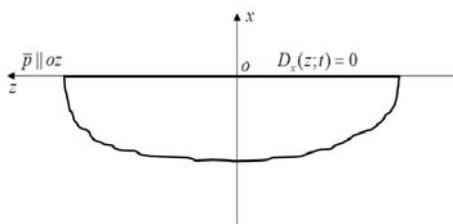
Очевидно, что в этом случае также при неучёте пьезоэлектрического эффекта в материале, когда $e_{11} \equiv 0$, взаимодействие между упругим и электрическим полями во вновь сформулированных граничных задачах исчезают.

Не нарушая общности в проблеме исследования электроупругих волн Рэлея, можем остановиться на одной из сформулированных выше задач электроупругой плоской деформации. При этом, в сформулированной граничной задаче электромеханические поверхностные условия на одной поверхности волновода возьмём из условий задачи, а на другой поверхности потребуем затухание искомым величин волнового поля.

С точки зрения анизотропии материала и сравнительно простой связи взаимодействия физико-механических полей, естественно, выбрать более информативную краевую задачу из выше сформулированных.

1. Электроупругие волны Рэлея при механически свободной и электрически прозрачной поверхности пьезоэлектрического полупространства.

Рассмотрим распространение волны электроупругой плоской деформации в полупространстве из пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии.



Фиг. 3. Пьезоэлектрическое полупространство с электрически открытой поверхностью. Пьезокристалл класса $\bar{6}m2$ поляризован параллельно механически свободной поверхности

Полупространство

$$\Omega_1 = \{x \leq 0; |y| < \infty; |z| < \infty\}$$

отнесено к координатной системе $oxyz$ так, что в кристаллографическом срезе $x_3, 0x_1$

$0x_1 \rightleftharpoons ox$, перпендикулярная к

поверхности полупространства $x = 0$,

инверсионная ось $\bar{p} \parallel 0x_3 \rightleftharpoons oz$

параллельна поверхности полупространства.

В полупространстве решается система квазистатических уравнений (1.10),

которая по введённым обозначениям

$$\theta_{14} = c_{11}/c_{44}, \quad \theta_{43}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{33}; \quad \theta_{43} = c_{44}/c_{33}; \quad \theta_{14}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{44}$$

безразмерных характеристик упругой и $\theta_{31} = \epsilon_{33}/\epsilon_{11}$ – диэлектрической анизотропии

материала. $c_{1l} = \sqrt{c_{33}/\rho}$ и $c_{lt} = \sqrt{c_{44}/\rho}$ – скорости продольной и поперечной

упругих объёмных волн соответственно, без учёта электроактивности материала

перепишется в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial z^2} + \theta_{43} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{13}^* \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x \partial z} &= c_{1l}^{-2} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial z^2} + \theta_{14} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{14}^* \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x \partial z} + \frac{e_{11}}{c_{44}} \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial x^2} &= c_{1l}^{-2} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{31} \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial z^2} - \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

На поверхности полупространства будет удовлетворена часть граничных условий (1.17) и (1.18):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(x; z; t)}{\partial x} + \theta_{13}^* \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial z} + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial u(x; z; t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial \mathbf{u}(x; z; t)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (2.3)$$

Кроме условий (2.1) и (2.2), на искомые величины волнового поля также налагаются условия затухания в глубине полупространства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \mathbf{u}(x; z; t); \mathbf{v}(x; z; t); \varphi(x; z; t); \} = 0. \quad (2.4)$$

Представляем решения системы уравнений (2.1) в виде нормальных плоских волн:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x; z; t) \\ \mathbf{w}(x; z; t) \\ \varphi(x; z; t) \end{cases} = \begin{cases} A \cdot \exp(qkx) \\ B \cdot \exp(qkx) \\ C \cdot \exp(qkx) \end{cases} \cdot \exp[i(kz - \omega t)]$$

где $k \triangleq 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина распространяющейся волны, а q – коэффициент затухания волн по глубине полупространства.

Удовлетворяющее условиям затухания (2.4) общее решение системы получается в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(x; z; t) \\ \mathbf{u}(x; z; t) \\ \varphi(x; z; t) \end{cases} = \begin{cases} A \cdot \exp(q_1 kx) + b_w B \cdot \exp(q_2 kx) + c_w C \cdot \exp(q_3 kx) \\ a_u A \cdot \exp(q_1 kx) + B \cdot \exp(q_2 kx) + c_u C \cdot \exp(q_3 kx) \\ a_\varphi A \cdot \exp(q_1 kx) + b_\varphi B \cdot \exp(q_2 kx) + C \cdot \exp(q_3 kx) \end{cases} \cdot \exp[i(kz - \omega t)] \quad (2.5)$$

с характеристическим уравнением

$$\begin{aligned} & \left\{ p^2 - [\theta_{34} \alpha_t^2 + \tilde{\theta}_{41} \alpha_t^2 - \theta_{14}^* \tilde{\theta}_{11}^*] p + \tilde{\theta}_{31} \alpha_t^2 \alpha_t^2 \right\} p - \\ & - \tilde{\theta}_{31} \left\{ p^2 - [\theta_{34} \alpha_t^2 + \theta_{41} \alpha_t^2 - \theta_{11}^* \theta_{14}^*] p + \theta_{31} \alpha_t^2 \alpha_t^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

для определения коэффициентов затухания $q_n = \sqrt{p_n}$, где $n=1; 2; 3$. Для наглядности, в запись общего решения (2.5) введены обозначения, характеризующие ветви форм колебаний:

$$a_u = i\theta_{11}^* \frac{q_1 (q_1^2 - \vartheta_{31})}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4}; \quad (2.7)$$

$$a_\varphi = i\theta_{11}^* \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{q_1^3}{(1 + \chi_{11}^2) q_1^4 - (\vartheta_{31} + \theta_{41} \eta_t^2) q_1^2 + \theta_{41} \vartheta_{31} \eta_t^2}$$

$$b_w = -i\theta_{14}^* \frac{q_2}{[q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_t^2)]};$$

$$c_w = i\theta_{14}^* \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{q_3^3}{[q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_t^2)] [q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \quad (2.8)$$

$$b_\phi = \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{q_2^2}{(q_2^2 - \mathfrak{G}_{31})}; \quad c_u = -\frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{q_3^2 [q_3^2 - \theta_{34}(1 - \eta_l^2)]}{[q_3^2 - \theta_{34}(1 - \eta_l^2)][q_3^2 - \theta_{41}\eta_l^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \quad (2.9)$$

В соотношениях (2.6)÷(2.9) фигурируют безразмерные характеристики анизотропии материала $\tilde{\theta}_{\alpha\gamma} = c_{\alpha\alpha}/\tilde{c}_{\gamma\gamma}$, $\theta_{1\alpha}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{\alpha\alpha}$, $\tilde{\theta}_{1\alpha}^* = (c_{44} + c_{13})/\tilde{c}_{\alpha\alpha}$, $\tilde{c}_{\alpha\alpha} = (1 + \chi_{11}^2)c_{\alpha\alpha}$; $\tilde{\mathfrak{G}}_{31} = \varepsilon_{33}/\tilde{\varepsilon}_{11}$, $\tilde{\varepsilon}_{11} = (1 + \chi_{11}^2)\varepsilon_{11}$, а также $\chi_{11}^2 = e_{11}^2/(\varepsilon_{11}c_{11})$ – коэффициент электромеханической связи и коэффициенты формообразования $\alpha_l^2 = 1 - (\omega^2/k^2)(c_{33}/\rho)$ продольной и $\alpha_t^2 = 1 - (\omega^2/k^2)(c_{44}/\rho)$ – поперечной форм волны по толщине волновода.

Введённое в характеристическое уравнение (2.6) обозначение $p \triangleq q^2$ приводит к тому, что все три волновые ветви будут затухающими по глубине полупространства, если все три корни характеристического уравнения (2.6) вещественные, положительные и различные. Тогда, область определения существования затухающих в глубь полупространства решений получается из условий:

$$\begin{aligned} \Delta = & -4\mathfrak{G}_{31}\alpha_l^2\alpha_t^2 \left[(1 + \chi_{11}^2)\theta_{14}\alpha_l^2 + \theta_{43}\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}\theta_{13} - \theta_{14}^*\theta_{13}^* \right]^3 - \\ & -27 \left[\mathfrak{G}_{31}(1 + \chi_{11}^2)\theta_{13}\alpha_l^2\alpha_t^2 \right]^2 - 4(1 + \chi_{11}^2)\theta_{13} \left[\alpha_l^2\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}(\theta_{43}\alpha_l^2 + \theta_{14}\alpha_t^2 - \theta_{14}^*\theta_{13}^*) \right]^3 + \\ & + 18\mathfrak{G}_{31}(1 + \chi_{11}^2)\theta_{13}\alpha_l^2\alpha_t^2 \left[(1 + \chi_{11}^2)\theta_{14}\alpha_l^2 + \theta_{43}\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}\theta_{13} - \theta_{14}^*\theta_{13}^* \right] \times \\ & \times \left[\alpha_l^2\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}(\theta_{43}\alpha_l^2 + \theta_{14}\alpha_t^2 - \theta_{14}^*\theta_{13}^*) \right] + \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$+ \left[(1 + \chi_{11}^2)\theta_{14}\alpha_l^2 + \theta_{43}\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}\theta_{13} - \theta_{14}^*\theta_{13}^* \right]^2 \left[\alpha_l^2\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}(\theta_{43}\alpha_l^2 + \theta_{14}\alpha_t^2 - \theta_{14}^*\theta_{13}^*) \right]^2 \geq 0$$

$$\alpha_l^2 \cdot \alpha_t^2 > 0 \quad (2.11)$$

Подставляя полученные решения (2.5) в граничные условия (2.2) и (2.3), из условия существования нетривиальных решений находим уравнение дисперсии поверхностных электроупругих волн плоской деформации (электроупругие волны Рэлея в случае электрически прозрачной поверхности пьезоэлектрика) в следующем виде:

$$\det \left\| \hat{g}_{ij} [V_\phi(\omega/k)] \right\|_{3 \times 3} = 0 \quad (2.12)$$

В уравнении дисперсии элементы матрицы $\hat{g}_{ij} [V_\phi(\omega/k)]$ представляются безразмерными физико-механическими постоянными материала, корнями

характеристического уравнения (2.6), а также безразмерными фазовыми скоростями $\eta_l^2 = (\omega^2/k^2)(c_{33}/\rho)$ и $\eta_t^2 = (\omega^2/k^2)(c_{44}/\rho)$ объёмных волн

$$\begin{aligned} g_{11} &\triangleq \left[\frac{\theta_{11}^* [q_1^2 + \theta_{13} [q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2]] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + (1 + \theta_{11}^* \chi_{11}^2) \chi_{11}^2 q_1^4}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4} \right]; \\ g_{12} &\triangleq \left[\frac{\theta_{13}^* \theta_{14}^* (q_2^2 - \vartheta_{31}) + [(1 + \chi_{11}^2) q_2^2 - \vartheta_{31}] [q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)]}{[q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)]} \right] q_2; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} g_{13} &\triangleq \frac{e_{11}}{c_{11}} q_3^3 \left[\frac{\theta_{31} \eta_t^2 [(1 - \theta_{43}) - \theta_{31} \eta_t^2] - (\theta_{11}^* q_3^2 + \theta_{13}^*) \theta_{14}^*}{[q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] [q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \right]; \\ g_{21} &\triangleq \left(\frac{[\chi_{11}^2 q_1^4 + q_1^2 - \theta_{41} (\eta_t^2 - \theta_{14}^*)] (q_1^2 - \vartheta_{31})}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4} \right) q_1; \\ g_{22} &\triangleq \left(\frac{[q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] - \theta_{14}^* q_2^2}{[q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)]} \right); \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} g_{23} &\triangleq \frac{e_{11}}{c_{11}} \left(\frac{(\theta_{14}^* - 1) q_3^2 + \theta_{34} (1 - \eta_l^2)}{[q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] [q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \right) q_3^2; \\ g_{31} &\triangleq -\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \theta_{11}^* \left[\frac{\vartheta_{31}}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4} \right] q_1; \quad g_{32} \triangleq -\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\vartheta_{31}}{(q_2^2 - \vartheta_{31})}; \\ g_{33} &\triangleq -\frac{[(1 + \chi_{11}^2) q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] [q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4}{[q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] [q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. Электроупругие волны Рэлея при механически свободной и электрически экранированной поверхности пьезоэлектрического полупространства.

Рассмотрим распространение волны электроупругой плоской деформации в полупространстве из пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии в той же ориентации кристаллических осей пьезоэлектрика.

В полупространстве опять будет решена система квазистатических уравнений (2.1) теми же введёнными обозначениями. На поверхности полупространства будет удовлетворена уже другая часть граничных условий (1.17) и (1.18). Вместо условия электрически прозрачной поверхности (2.3), наряду с условиями механически

свободной поверхности (2.2) будет удовлетворяться условие электрически экранированной поверхности пьезоэлектрического полупространства

$$\Phi(x, z; t)|_{x=0} = 0. \quad (3.1)$$

Поступая аналогично, подставляя полученные решения (2.5) в граничные условия (2.2) и (3.1), из условия существования нетривиальных решений находим уравнение дисперсии поверхностных электроупругих волн плоской деформации (электроупругие волны Рэлея в случае экранированной поверхности пьезоэлектрика) в следующем виде:

$$\det \left\| \hat{f}_{ij} \left[V_\phi(\omega/k) \right] \right\|_{3 \times 3} = 0. \quad (3.2)$$

В полученном уравнении дисперсии (3.2) элементы матрицы $\hat{f}_{ij} \left[V_\phi(\omega/k) \right]$ также представляются безразмерными физико-механическими постоянными материала, корнями характеристического уравнения (2.6), и безразмерными фазовыми скоростями $\eta_l^2 = (\omega^2/k^2)(c_{33}/\rho)$ и $\eta_t^2 = (\omega^2/k^2)(c_{44}/\rho)$ объёмных волн. Причём, элементы первых двух строк матриц дисперсий, когда $i=1;2$ и $j=3$, совпадают $\hat{g}_{ij} \left[V_\phi(\omega/k) \right] \equiv \hat{f}_{ij} \left[V_\phi(\omega/k) \right]$, а элементы третьей строки матрицы $\hat{f}_{ij} \left[V_\phi(\omega/k) \right]$ равны:

$$f_{31} \triangleq \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \frac{\theta_{11}^* q_1^3}{\left[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2 \right] \left(q_1^2 - \mathfrak{G}_{31} \right) + \chi_{11}^2 q_1^4}; \quad f_{32} \triangleq \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \frac{q_2^2}{\left(q_2^2 - \mathfrak{G}_{31} \right)}; \quad f_{33} \triangleq 1 \quad (3.3)$$

4. Сравнительный анализ полученных результатов.

Из полученных соотношений (2.1)÷(2.9) очевидно, что при отсутствии пьезоэффекта, когда $e_{11} \equiv 0$, краевая задача электроупругости (2.1)÷(2.3) распадается на две несвязанные задачи электростатики и динамической задачи упругости (фиг. 4.а, фиг. 4.б).

В соотношениях (2.7)÷(2.9) все множители, кроме a_{1u} и b_{2w} , также равны нулю, вследствие чего решения (2.5) и характеристическое уравнение (2.6) намного упрощаются. В частности, характеристическое уравнение получается в виде:

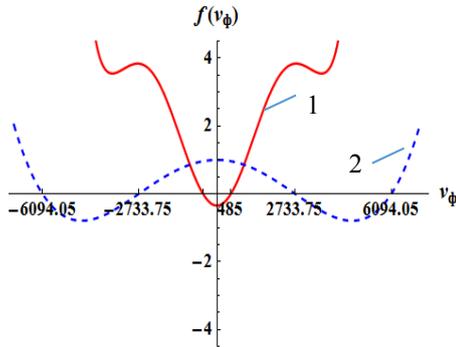
$$\left[p^2 - \left[\theta_{34} \alpha_t^2 + \theta_{41} \alpha_t^2 - \theta_{14}^* \theta_{11}^* \right] p + \theta_{31} \alpha_t^2 \alpha_t^2 \right] (p - \mathfrak{G}_{31}) = 0, \quad (4.1)$$

откуда для не распространяющегося электростатического поля получается:

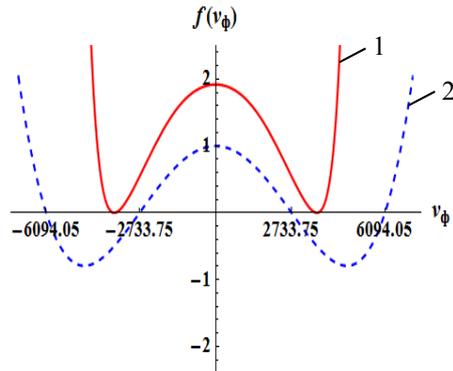
$$\Phi_0(x) = C_3 \cdot \exp \left[\left(-\sqrt{\epsilon_{33}/\epsilon_{11}} \right) kx \right]. \quad (4.2)$$

Для чистой упругой волны плоской деформации получается:

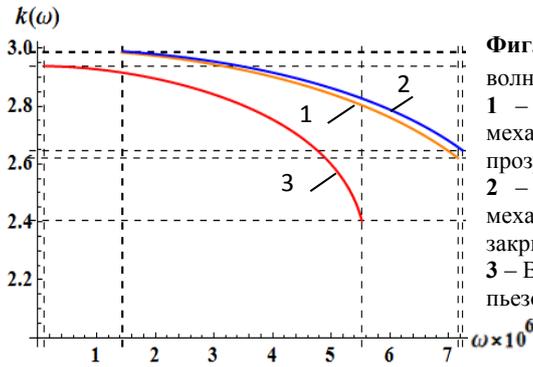
$$p_{1,2} = \frac{\left[\theta_{34} \alpha_t^2 + \theta_{41} \alpha_t^2 - \theta_{14}^* \theta_{11}^* \right] \pm \sqrt{\left[\theta_{34} \alpha_t^2 + \theta_{41} \alpha_t^2 - \theta_{14}^* \theta_{11}^* \right]^2 - 4\theta_{31} \alpha_t^2 \alpha_t^2}}{2} \quad (4.3)$$



Фиг. 4.а. Область определения для функции Рэлея $f(V_\phi)$ по фазовой скорости $V_\phi(\omega)$ при распространении волны параллельно оси поляризации пьезоэлектрического кристалла



Фиг. 4.б. Область определения для функции Рэлея $f(V_\phi)$ по фазовой скорости $V_\phi(\omega)$ при распространении волны перпендикулярно к оси поляризации пьезоэлектрического кристалла.



Фиг. 5. Фазовая $k(\omega)$ зависимость для волн Рэлея:

- 1 – Электроупругие волны Рэлея при механически свободной, электрически прозрачной поверхности.
- 2 – Электроупругие волны Рэлея при механически свободной, электрически закрытой поверхности.
- 3 – Волны Рэлея при отсутствии пьезоэффекта.

$$w(x; z; t) = [A_1 \cdot \exp[q_1 kx] + b_w B_2 \cdot \exp[q_2 kx]] \exp[i(kz - \omega t)] \quad (4.4)$$

$$u(x; z; t) = [a_u A_1 \cdot \exp[q_1 kx] + B_2 \cdot \exp[q_2 kx]] \exp[i(kz - \omega t)]$$

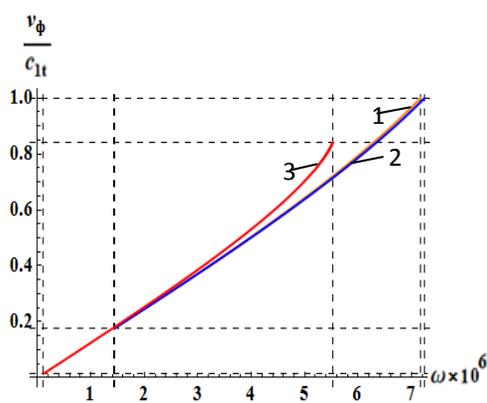
с амплитудными коэффициентами $a_u = i\theta_{11}^* q_1 / (q_1^2 - \theta_{41} \eta_i^2)$ и

$$b_w = -i\theta_{14}^* q_2 / [q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_i^2)].$$

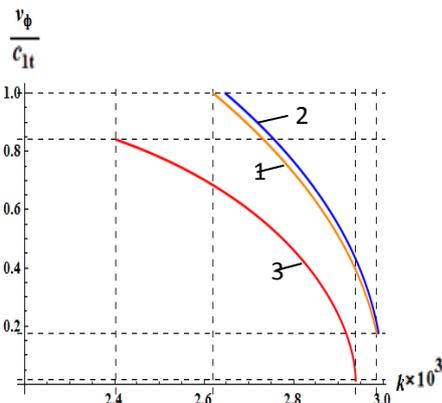
Совместное решение системы неравенств (2.10) и (2.11) определяет область определения фазовых скоростей $V_\phi(\omega)$ (или $V_\phi(k)$) электроакустических волн плоской деформации.

Из сравнения приведённых графических изображений следует, что в данном случае учёт пьезоэлектрического эффекта в материале сужает область определения фазовой скорости. Область определения $0 < V_\phi(\omega) < c_t$ при неучёте пьезоэффекта

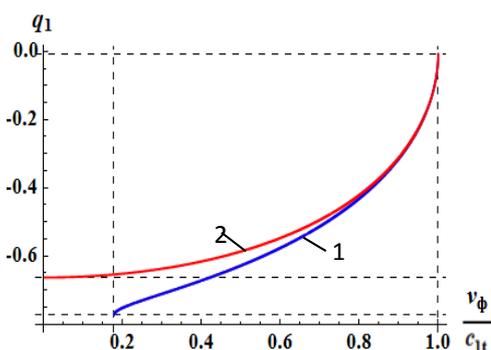
превращается в $c_0(\chi_{11}^2) < V_\phi(\omega) < c_t$, с положительной нижней границей, зависящей от коэффициента электромеханической связи материала. Локализованные электроакустические волны Рэлея характеризуются фазовыми связями, приведёнными на фиг.5. Эти, а также зависимости приведённой фазовой скорости от частоты или от волнового числа (фиг. 6.а и фиг. 6.б) получаются решением дисперсионного уравнения (2.12) с учётом соотношений (2.13)–(2.15) (фиг. 6а и фиг. 6.б). Из фиг.5 видно, что с учётом пьезоэффекта материала, при тех же частотах имеем распространение более коротких волн по сравнению со случаем чистой упругости.



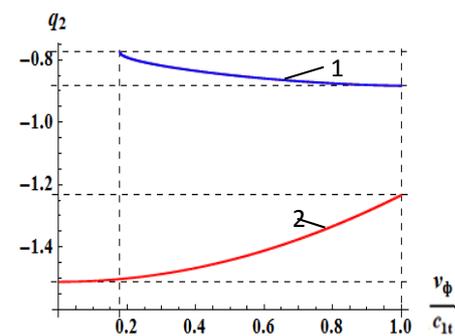
Фиг. 6.а Фазовая скорость $V_\phi(\omega)/c_t$ волны Рэлея
 1 – при механически свободной и электрически прозрачной поверхности,
 2 – при механически свободной и электрически экранированной поверхности,
 3 – пьезоэффект в материале отсутствует.



Фиг. 6.б Фазовая скорость $V_\phi(k)/c_t$ волны Рэлея
 1 – при механически свободной и электрически прозрачной поверхности,
 2 – при механически свободной и электрически экранированной поверхности,
 3 – пьезоэффект в материале отсутствует.



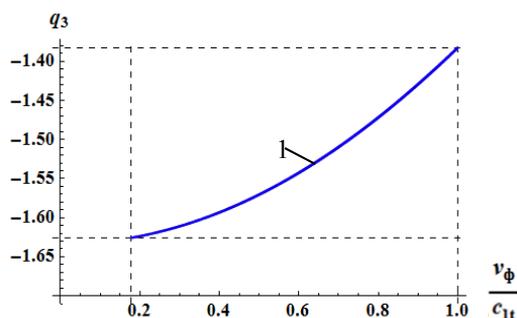
Фиг. 7.а Коэффициент затухания $q_1[V_\phi(\omega)/c_t]$ продольной ветви волны Рэлея
 1 – при механически свободной и электрически прозрачной (или экранированной) поверхности.
 2 – пьезоэффект в материале отсутствует.



Фиг. 7.б Коэффициент затухания $q_2[V_\phi(\omega)/c_t]$ поперечной ветви волны Рэлея
 1 – при механически свободной и электрически прозрачной (или экранированной) поверхности.
 2 – пьезоэффект в материале отсутствует.

Известно, что локализация волн электроупругого сдвига у механически свободной поверхности пьезоэлектрического полупространства происходит при экранизации внутреннего электрического поля, или же её полной сопряжённости со внешним электрическим полем.

В отличие от этого, здесь в обоих случаях электрических условий на механически



Фиг. 7.в. Коэффициент затухания $q_3[V_\phi(\omega)/c_t]$ сопутствующих упругую волну электрических колебаний в случаях электрически прозрачной (или экранированной) механически свободной поверхности полупространства

свободной поверхности полупространства наличие в материале пьезоэлектрического эффекта сопутствует процессу локализации электроупругой волны плоской деформации. Интересно также влияние учёта пьезоэлектрического эффекта на коэффициенты затухания соответствующих ветвей волны электроупругой плоской деформации (фиг. 7.а, фиг. 7.б и фиг. 7.в).

Из фиг.7.а следует, что с возрастанием фазовой скорости

$$V_\phi(\omega)/c_t \quad \text{величина}$$

коэффициента затухания продольного компонента $q_1[V_\phi(\omega)/c_t]$, как и в классическом случае упругости, уменьшается до нуля. С возрастанием фазовой скорости $V_\phi(\omega)/c_t$ уменьшаются также величины коэффициента затухания сопутствующих упругую волну электрических колебаний (фиг. 7.в) и коэффициента затухания поперечного компонента электроупругой волны Рэлея $q_2[V_\phi(\omega)/c_t]$ (фиг. 7.б-2). А вот, с возрастанием фазовой скорости $V_\phi(\omega)/c_t$, в отличие от всех ветвей волны, величина коэффициента затухания поперечного компонента электроупругой волны Рэлея $q_2[V_\phi(\omega)/c_t]$ возрастает (фиг. 7.б-1).

Заключение. Сформулирована математическая смешанная краевая задача электроактивной плоской деформации волновода из пьезоэлектриков класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии со смешанными электрическими граничными условиями. При выборе разных ориентаций кристаллической поляризации относительно механически свободных поверхностей волновода получаются совершенно разные краевые задачи.

Исследовано распространение высокочастотных электроакустических коротких волн плоской деформации в пьезоэлектрическом полупространстве

(электроакустические волны Рэлея) при разных электрических граничных условиях на механически свободной поверхности.

Численно анализировано возможное изменение области определения фазовой скорости электроакустических волн Рэлея, характер изменения коэффициентов затуханий упругих составляющих и сопутствующих им электрических колебаний в зависимости от фазовой скорости волны, а также различия фазовых скоростей коротких волн при разных электрических условиях на механически свободных поверхностях волновода.

REFERENCES

1. Rayleigh J.W., On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. //Proc. Math. Soc. London. 1885/1886. vol. 17. p. 4-11.
2. Bleustein, J. L. A New Surface Wave in Piezoelectric Medium. //Appl. Phys. Lett., vol.13 (1968), p. 412-413.
3. Аветисян А.С. Поверхностные электроупругие волны Лява в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 1987. Т.40. №1. С. 24-29. Avetisyan A.S. Love's electro-elastic surface waves in case of inhomogeneous piezoelectric layer.// Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, (1987), vol.40, №1, pp. 24-29. ISSN 0002-3051, (in Russian).
4. Li, S. The Electro-magneto-acoustic Surface Wave in a Piezoelectric Medium: The Bleustein - Gulyaev Mode. J. Appl. Phys., vol.80, (1996), p.5264-5269.
5. Yang, J. S. Bleustein - Gulyaev Waves in Piezo-electro- magnetic Materials. //Int. J. Appl. Elect. Mech., vol.12, (2000), p.235-240.
6. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 1988. Т.41. № 5. С. 34-40. Avetisyan A.S. About propagation of electro-elastic monochromatic wave in nonhomogeneous piezoelectric. //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, (1988), vol.41, №5, pp. 34-40. ISSN 0002-3051, (in Russian).
7. Liu, H., Z. B. Kuang, Z. M. Cai. Propagation of Bleustein - Gulyaev Waves in a Pre-stressed Layered Piezoelectric Structure. Ultrasonics, vol.41, (2003), p.397-405.
8. Yang, J. S. A Review of a Few Topics in Piezoelectricity. //Appl. Mech. Rev., vol.59, (2006), p.335-345.
9. Piliposian G.T. and Danoyan Z.N., Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layers. //Int. J. of Solids and Structures, (2009), vol. 46, pp. 1345-1353.
10. Qian Zh.-H., Hirose S., Kishimoto K., Transverse surface waves in a functionally graded substrate carrying a 6mm piezoelectric material layer. //J. Solid Mech. And Materials Engineering, (2010), vol. 4, №8, pp.1315-1322.
11. Аветисян А.С., Камалян А.А. О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6mm. // Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. №2. С.108-115. Avetisyan A.S., Kamalyan A.A. On Propagation of Electroelastic Shear Wave in 6mm Class Piezodielectric Inhomogeneous Layer. //Reports of NAS Armenia, (2014), vol. 114, №2, pp.108-115, (in Russian).

12. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв. АН Арм.ССР, Механика. 1985. Т.38. №1. С.12-19.
Avetisyan A.S. About the problem of the propagation of transversal waves in piezoelectric. //Proceed. of National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics, (1985), vol.38, (1). pp. 12-19. ISSN 0002-3051, (in Russian).
13. Baljeet Singh, Ranbir Singh, Rayleing wave in a rotating initially stressed piezoelectric half-space. //Jour. Of Theor. And Appl. Mechanics, vol.43, Issue 2, **DOI:** <https://doi.org/10.2478/jtam-2013-0014>
14. Chaudhary S., Sahu S.A., Singhal A., Analytic model for Rayleigh wave propagation in piezoelectric layer overlaid orthotropic substratum, Acta Mechanica, 2017, vol. 228, Issue 2, pp. 495–529.
15. Vashishth, A.K., Sukhija, H., Coupled Rayleigh waves in a 2-mm piezoelectric layer over a porous piezo-thermoelastic half-space, 2017, Acta Mechanica,
16. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. //Доклады НАН Армении. 2005. Т.105. №2. С.362-369.
Belubekyan V.M., Belubekyan M.V. Three-dimensional Problem of Reyleigh Wave Propagation. //Reports of NAS RA, 2005, v.105, №2, p.362-369 (in Russian).
17. Sarkisyan S.V., Three-Dimensional Problem of Waves Propagation in Half-Space With an Elastically Restrained Boundary. //Proceed. of National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics, (2017), vol.70, (2). pp. 74-83. ISSN 0002-3051.
18. Vinh P.C., Ngoc Anh V.T., Khanh Linh N.T., Exact secular equations of Rayleigh waves in an orthotropic elastic half-space overlaid by an orthotropic elastic layer. //Int. Jour. of Solids and Struct., (2016), Vol. 83. P. 65-72.
19. Vinh, P.C., Xuan, N.Q., Rayleigh waves with impedance boundary condition: Formula for the velocity, existence and uniqueness, 2017. //European Journal of Mechanics, A/Solids.
20. Kiselev A.P., Rayleing wave with a transvers structure. //Proc. of the Royal Soc. Lond. Ser. A, (2004), vol. 460, DOI:10.1098/rspa.2004.1359.
21. Sethi M., Gupta K.C., Rajan Sharma and Dinesh Malik, Propagation of Rayleigh Waves in Non-homogeneous elastic Half space of Orthotropic Material Under Initial Compression and Influence of Gravity. //Int. Journ. Of Modern Applied Physics, (2013), vol. 2(1), pp. 48-57.

About authors:

Ara S. Avetisyan– Corresponding Member of NAS, Professor, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences, Yerevan, Republic of Armenia

Address: 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2

Phone: (+37493) 00-44-55, **E-mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com

Suren H. Mkrtchyan– PhD student in Institute of Mechanics of NAS RA

E-mail: sur_mkrtyan@mail.ru

Поступила в редакцию 17.11.2017