ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №1, 2011 Механика
УДК 539.3

ОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН *)

САРКИСЯН С.О.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, пластинка, тонкая, модели
Key words: micropolar, elastic, plate, thin, models

Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի մաթեմատիկական մոդելները

Աշխատանքում ձևակերպվում են ընդունելություններ (վարկածներ), որոնք ունեն ասիմպտոտիկ հիմնավորում, և նրանց հիման վրա, կախված ֆիզիկական անչափ պարամետրերի ընդունած արժեքներից, կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի ընդհանուր կիրառական-երկչափ՝ ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով և «փոքր սահքային կոշտության» մոդելները: Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի այս կառուցված ընդհանուր տեսություններում լիարժեքորեն հաշվի են առնված ընդլայնական սահքային և նմանատիպ ծագումով մյուս բոլոր դեֆորմացիաները:

Sargsyan S.H.
General Mathematical Models of Micropolar Thin Elastic Plates

In the present paper there are first formulated assumptions (hypotheses) which have asymptotical confirmation and afterwards, based on the hypotheses, depending on the values of sizeless physical constants, there are constructed the general applied two-dimensional models of micropolar thin elastic plates with independent rotation; constaint rotation and with “small shift rigidity”. In all these models the transverse shift and other related deformations are completely taken into account.

В данной работе формулируются предположения (гипотезы), имеющие асимптотическое подтверждение, и на их основе, в зависимости от значений физических безразмерных параметров построены общие прикладные-двумерные модели микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью». В построенных общих теориях микрополярных упругих тонких пластин полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Введение. В связи с задачами микро- и нанотехнологии актуально построение моделей микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок. Современный обзор исследований в этой области приведены в работах [1,2].

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек, пластин (балок) заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной задачи микрополярной теории упругости к некоторой двумерной (одномерной) краевой задаче. Для достижения этой цели уместно использование качественной стороны результата асимптотического метода интегрирования граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях [3-7].

В данной работе, применяя результат асимптотического анализа краевой задачи трехмерной микрополярной теории упругости в тонкой области пластинки [3], формулируются предположения (гипотезы) и на их основе, в зависимости от

*) Работа доложена на 16 th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. June 27-July 2, 2010, State College, Pennsylvania, USA.

значений физических безразмерных параметров, построены общие прикладные-двумерные теории микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений; со стесненным вращением; “с малой сдвиговой жесткостью”, при которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Постановка задачи

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений (в декартовых координатах) пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [8-10]:

уравнения равновесия

$$\sigma_{mn,n}=0\ ,\qquad \mu_{mn,n}+y_{nmk}\sigma_{mk}=0 \tag{1}$$

физические соотношения

$$\begin{gathered}\sigma_{mn}=(\mu+\alpha)\cdot\gamma_{mn}+(\mu-\alpha)\cdot\gamma_{nm}+\lambda\cdot\gamma_{kk}\cdot\delta_{nm}\ ,\\ \mu_{mn}=(\gamma+\varepsilon)\cdot\chi_{mn}+(\gamma-\varepsilon)\cdot\chi_{nm}+\beta\cdot\chi_{kk}\cdot\delta_{nm},\end{gathered} \tag{2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{nm}=V_{m,n}-y_{knm}\cdot\omega_k\,,\qquad \chi_{nm}=\omega_{m,n}\ . \tag{3}$$

Здесь σ_{nm},μ_{nm} – компоненты несимметричных тензоров силового и моментного напряжений; γ_{nm},χ_{nm} – компоненты несимметричных тензоров деформаций и изгиба-кручений; V_n,ω_n – компоненты векторов перемещения и независимого поворота; $-h\le x_3\le h$; $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – упругие постоянные микрополярного материала; индекс n после запятой означает дифференцирование по координате x_n; y_{knm} – тензор Леви-Чивиты; δ_{nm} – символы Кронекера; индексы n,m,k принимают значения 1,2,3.

Следует констатировать, что основной физической постоянной, придерживающей уравнения (1)-(3) на уровне микрополярной теории упругости, является физическая постоянная α (при $\alpha=0$ из этой системы будут отделяться уравнения классической теории упругости).

Рассмотрим задачу изгиба микрополярных пластин (т.е. антисимметричную по x_3 задачу).

Для граничных условий на лицевых плоскостях пластинки $x_3=\pm h$ будем считать заданными силовые и моментные напряжения:

$$\sigma_{3i}=p_i/2\ ,\quad \sigma_{33}=\pm p_3/2\ ,\quad \mu_{3i}=\pm m_i/2,\ \ \mu_{33}=m_3/2\quad (i=1,2) \tag{4}$$

Граничные условия на боковой поверхности пластинки $\sum$, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Предположим, что толщина пластинки $2h$ мала по сравнению с длиной волны деформации a в плане. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкой пластинки состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю область трехмерной пластинки и пограничных слоев, локализирующихся вблизи боковой поверхности

$\sum$. Построение общей двумерной модели микрополярных упругих тонких пластин тесно связано с построением внутренней задачи. Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, построим модель микрополярной упругой пластинки на основе метода гипотез. Сами гипотезы сформулируем на основе результата асимптотического анализа поставленной трехмерной краевой задачи в тонкой пространственной области пластинки [3].

При определении внутреннего НДС (так и краевого НДС) большую роль играют значения физических констант материала пластинки, с этой точки зрения вводим следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu}{\alpha}, \quad \frac{a^2\mu}{\beta}, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma}, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \tag{5}$$

(уже отмеченный геометрический размер a здесь играет роль масштабного фактора).

Модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений

Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры пластинки (5) принимают значения:

$$\frac{\mu}{\alpha} \sim 1 \text{ (т.е. } \alpha \sim \mu\text{)} \quad \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{6}$$

Качественные результаты [3] исходного приближения асимптотического метода интегрирования поставленной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3) позволяют в основу построения прикладной-двумерной модели микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений формулировать следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

а) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной плоскости, свободно вращается под некоторым углом, не изменяя при этом своей длины; вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений и свободных вращений:

$$V_i = x_3\psi_i\left(x_1, x_2\right), \qquad V_3 = w\left(x_1, x_2\right),$$

$$\omega_i = \Omega_i\left(x_1, x_2\right), \qquad \omega_3 = x_3\iota\left(x_1, x_2\right) \qquad \left(i = 1,2\right), \tag{7}$$

где ψ_i – полные углы поворота, а Ω_i – некоторые свободные повороты первоначально нормального элемента вокруг осей x_i; w – перемещение точек срединной плоскости в направлении x_3; ι – интенсивность свободного поворота ω_3 вдоль оси x_3.

Кинематические гипотезы (7) относительно перемещений, это по сути дела, представляют собой известные гипотезы Тимошенко в классической теории упругих пластин [11]. Кинематические гипотезы (7) в целом можем трактовать как обобщенные гипотезы Тимошенко в микрополярной теории пластин;

б) силовым напряжением σ_{33} в обобщенном законе Гука (2) можем пренебречь относительно силовых напряжений σ_{ii};

в) для определения деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, для силового напряжения σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем

$$\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}\left(x_1,x_2\right),\qquad \mu_{33}=\overset{0}{\mu}_{33}\left(x_1,x_2\right)\quad \left(i=1{,}2\right), \tag{8}$$

после определения указанных величин, окончательно, значения σ_{3i} и μ_{33} определим соответственно, как сумму значения (8) и результата интегрирования либо первых двух уравнений из (1), либо шестого из (1) уравнения равновесия, для которых потребуем условия, чтобы усредненные по толщине пластинки величины были равны нулю.

Отметим, что силовая часть перечисленных гипотез (имеем в виду гипотезу в)) отличается от соответствующей гипотезы теории Тимошенко в классическом случае [11]. Забегая вперед, отметим, что двумерная теория, построенная на основе гипотез а)- в) (так и ее классический аналог), будет асимптотически точной теорией.

Основная система уравнений общей теории изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, построенных с помощью перечисленных гипотез а)-в), будет выражаться так:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-\tilde{p}_3,\qquad N_{3i}-\left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\right)=h\tilde{p}_i, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+\left(-1\right)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\tilde{m}_i,\\ L_{33}-\left[\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2}+\left(M_{12}-M_{21}\right)\right]=h\tilde{m}_3\end{gathered} \tag{10}$$

физические соотношения

$$\begin{gathered}N_{i3}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{i3}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{3i},\qquad N_{3i}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3},\\ M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{ii}+\nu K_{jj}\right),\qquad M_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right],\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},\ L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],\\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\tilde{m}_i}{2h}\right],\qquad L_{33}=2h\left(\beta+2\gamma\right)\iota+2h\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\end{gathered} \tag{12}$$

геометрические соотношения

$$\begin{gathered}K_{ii}=\frac{\partial\psi_i\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_i},\qquad K_{ij}=\frac{\partial\psi_j\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_i}-\left(-1\right)^j\iota,\\ \Gamma_{3i}=\psi_i-\left(-1\right)^j\Omega_j,\qquad \Gamma_{i3}=\frac{\partial w}{\partial x_i}+\left(-1\right)^j\Omega_j,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\kappa_{ii}=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i},\quad \kappa_{ij}=\frac{\partial\Omega_j}{\partial x_i},\quad l_{i3}=\frac{\partial\iota}{\partial x_i}\quad \left(i,j=1,2,i\neq j\right). \tag{14}$$

Здесь N_{13},N_{31} – усилия, M_{ii},M_{ij} – осредненные моменты от силовых напряжений, L_{ii},L_{ij} и L_{33} – осредненные моменты от моментных напряжений, Λ_{i3} – гипермоменты от моментных напряжений μ_{i3}:

$$N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dx_3,\quad N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}dx_3,\quad M_{ii}=\int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ii}dx_3,\quad M_{ij}=\int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ij}dx_3,$$

$$L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}dx_3,\quad L_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}dx_3,\quad L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dx_3,\quad \Lambda_{ii}=\int_{-h}^{h}x_3\mu_{i3}dx_3,$$

Γ_{3i},Γ_{i3} – сдвиговые деформации, $K_{ii},K_{ij},k_{ii},k_{ij}$ – изменения кривизны и кручения от силовых и моментных напряжений соответственно, l_{i3} – изменения гиперкривизны срединной плоскости пластинки.

К системе уравнений (9)-(14) микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением присоединим “смягченные” граничные условия на граничном контуре Γ срединной плоскости пластинки (например, при $x_1=\text{const}$):

$$\begin{aligned}&M_{11}=M_{11}^{*} \text{ или } K_{11}=K_{11}^{*};\quad M_{12}=M_{12}^{*} \text{ или } K_{12}=K_{12}^{*},\\ &N_{13}=N_{13}^{*} \text{ или } w=w^{*};\end{aligned} \tag{15}$$

$$L_{11}=L_{11}^{*} \text{ или } \kappa_{11}=\kappa_{11}^{*};\ L_{12}=L_{12}^{*} \text{ или } \kappa_{12}=\kappa_{12}^{*};\ \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^{*} \text{ или } l_{13}=l_{13}^{*}. \tag{16}$$

Система уравнений (9)-(14) и граничные условия (15), (16) будут представлять собой математическую модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это система 12-ого порядка с 6-ю граничными условиями на каждом крае срединной плоскости пластинки. Она содержит 35 уравнений относительно 35 неизвестных функций: $N_{i3},N_{3i},M_{ii},M_{ij},L_{ii},L_{ij},\Lambda_{i3},L_{33},\Gamma_{i3},\ \Gamma_{3i},K_{ii},K_{ij},\kappa_{ii},\kappa_{ij},l_{i3}\ \psi_i,w,\Omega_i,\iota$.

Если на основе принципа Даламбера, в уравнениях равновесия (9), (10) будем соответственным образом включать силу инерции $\left(2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$ и моменты инерции $\left(\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2},2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2},\frac{2h^3}{3}J\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}\right)$, приходим к общим динамическим уравнениям микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением (к которым следует кроме граничных условий (15), (16) присоединить также соответствующие начальные условия).

При $\alpha=0$ из уравнений (9)-(14) и граничных условий (15), (16) отделятся классические уравнения и граничные условия теории упругих пластин на основе гипотез Тимошенко [11] (с некоторым отличием, связанным с статической гипотезой в)).

Если в системе уравнений (9)-(14) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. если считать

$$\Gamma_{i3}+\Gamma_{3i}=0 \text{ или } \quad \psi_i=-\frac{\partial w}{\partial x_i}, \tag{17}$$

получим модель микрополярных упругих пластин со свободным вращением, когда вместо обобщенных кинематических гипотез Тимошенко (7) в основу примем обобщенную на микрополярный случай гипотезу Кирхгоффа (т.е. формулы (7) с учетом условий (17)).

Основные уравнения этой модели микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением будут представлять собой уравнения равновесия (9), (10) и нижеследующие физические, геометрические соотношения и граничные условия:

физические соотношения

$$N_{3i}-N_{i3}=4\alpha h\left(\Gamma_{3i}-\Gamma_{i3}\right),$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{ii}+\nu K_{jj}\right),\quad M_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right], \tag{18}$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},\quad L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],$$

$$\Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\tilde{m}_i}{2h}\right],\quad L_{33}=2h\left(\beta+2\gamma\right)\iota+2h\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right) \tag{19}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{3i}-\Gamma_{i3}=-2\left[\frac{\partial w}{\partial x_i}+\left(-1\right)^j\Omega_j,\right]\quad K_{ii}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2},\quad K_{ij}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}-\left(-1\right)^j\iota \tag{20}$$

$$\kappa_{ii}=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i},\qquad \kappa_{ij}=\frac{\partial\Omega_j}{\partial x_i},\qquad l_{i3}=\frac{\partial\iota}{\partial x_i} \tag{21}$$

граничные условия

$$M_{11}=M_{11}^* \text{ или } K_{11}=K_{11}^*,\qquad N_{13}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}=N_{13}^* \text{ или } w=w^* \tag{22}$$

$$L_{11}=L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\qquad L_{12}=L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,$$

$$\Lambda_{13}=\Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13}=l_{13}^*. \tag{23}$$

При данной модели, если формально подставим $\alpha=0$, отделятся уравнения и граничные условия классической теории пластин на основе гипотез Кирхгоффа.

В этом же разделе отметим, что когда физические безразмерные параметры (5) имеют значения

$$\alpha\sim\mu,\qquad \frac{a^2\alpha}{\beta}<<1,\qquad \frac{a^2\alpha}{\gamma}<<1,\qquad \frac{a^2\alpha}{\varepsilon}<<1, \tag{24}$$

то, как показывает асимптотический анализ поставленной трехмерной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3) микрополярной теории упругости, в последних трех уравнениях равновесия из (1) можем пренебрегать разностями силовых напряжений $\sigma_{3i}-\sigma_{i3}$, $\sigma_{12}-\sigma_{21}$ и, в результате, в двумерной теории «моментная часть» задачи отделится от «силовой части» задачи, как самостоятельная граничная задача.

Таким образом, если в основу принимать гипотезы а)-в), в случае (24), пренебрегая в уравнениях равновесия указанными разностями силовых напряжений, получим модель микрополярных пластин «с малой сдвиговой жесткостью» (это название происходит из того, что физическая постоянная α – тоже модуль сдвига, как и классический модуль μ, а в условиях (24), при данном a α – малая величина).

В случае принятия обобщенных кинематических гипотез Тимошенко, модель микрополярных пластин «с малой сдвиговой жесткостью» определится следующим образом: «моментная часть» задачи – это уравнения равновесия (10), в которых необходимо пренебрегать следующими разностями: $N_{j3} - N_{3j}, M_{12} - M_{21}$; физическими соотношениями (12), геометрическими соотношениями (14) и граничными условиями (16); «силовая часть» задачи – это уравнения равновесия (9), физические соотношения (11), геометрические соотношения (13) и граничные условия (15).

А в случае принятия в основу обобщенные кинематические гипотезы Кирхгоффа, для этой модели микрополярных пластин получим для «моментной части» опять отмеченную выше граничную задачу, а для «силовой части» задачи будем иметь те же уравнения равновесия, к которым следует присоединить физические соотношения (18), геометрические соотношения (20) и граничные условия (22).

Модель микрополярных пластин «с малой сдвиговой жесткостью» имеет следующую важную характеристику: если «моментная часть» имеет нулевое решение $\Omega_j \equiv 0, \quad \iota \equiv 0$ (это будеть иметь место, когда соответствующая граничная задача будет однородной), то «силовая часть» задачи не будет совпадать с соответствующей классической моделью пластин, так как в определяющих уравнениях этой теории (как с учетом поперечных сдвигов, так и без их учета) будут присутствовать члены с физической постоянной α.

Модель микрополярных упругих тонких пластин со стесненным вращением

Рассмотрим теперь случай, когда физические безразмерные параметры (5) имеют значения:

$$\alpha >> \mu, \qquad \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1, \qquad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1, \qquad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{25}$$

Как показывает асимптотический анализ [3] поставленной трехмерной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3), в случае (25) вектор поворота $\vec{\omega}$ в асимптотических приближениях выражается через вектор перемещения $\vec{V}$ формулой, идентичной соответствующей формуле классической теории упругости:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{V}, \tag{26}$$

а это означает, что изучаемый вопрос теперь находится в области микрополярной теории упругости со стесненным вращением [10,12], или иначе, псевдоконтинуума Коссера.

Отметим, что трехмерная микрополярная теория упругости со стесненным вращением имеет некоторые особенности [12]: а) в этой теории для материала тела используются четыре упругих константы – λ, μ (или E, ν) и γ, ε (или [12] l, η); б) на поверхности тела вместо шести граничных условий можно ставить только пять, а это в данном случае означает, что в граничных условиях на лицевых поверхностях пластинки (4) для моментного напряжения μ_{33} невозможно ставить произвольные граничные условия (т.к. легко показать, что в трехмерной модели со стесненным вращением μ_{33} выражается через μ_{11} и μ_{22}).

Изучая асимптотические свойства краевой задачи для систем уравнений (1)-(3) [3], в случае (25), в основу построения прикладной-двумерной модели микрополярных упругих тонких пластин можем принимать следующие предположения (гипотезы) – это сформулированные в предыдушем пункте обобщенные кинематические гипотезы Тимошенко а), статические гипотезы б) и в) (последние на этот раз только для силовых напряжений σ_{3i}), и д) условие стесненного вращения (векторная формула (26)).

Основная система уравнений общей теории изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин со стесненным вращением, построенная с помощью перечисленных выше гипотез а)-д), с полным учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, можем представить так:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-\tilde{p}_3, \qquad N_{3i}-\left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\right)=h\tilde{p}_i,$$
$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\tilde{m}_i, \qquad \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2}+M_{12}-M_{21}=0 \tag{27}$$

физические соотношения

$$N_{i3}+N_{3i}=4\mu h\left(\Gamma_{i3}+\Gamma_{3i}\right), \qquad M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-v^2\right)}\left(K_{ii}+vK_{jj}\right),$$
$$M_{12}+M_{21}=\frac{4\mu h^3}{3}\left[K_{12}+K_{21}\right], \qquad L_{ii}=4\gamma h\kappa_{ii}, \tag{28}$$
$$L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}\right], \qquad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left(\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\tilde{m}_i}{2h}\right)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{i3}+\Gamma_{3i}=\psi_i+\frac{\partial w}{\partial x_i}, \qquad K_{ii}=\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{12}+K_{21}=\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2},$$
$$\kappa_{ii}=\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{ij}=\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad l_{i3}=\frac{\partial \iota}{\partial x_i}, \tag{29}$$
$$\Omega_i=-\frac{1}{2}(-1)^j\left(\psi_j-\frac{\partial w}{\partial x_j}\right), \qquad \iota=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right).$$

К системе уравнений (27)-(29) микрополярных пластин со стесненным вращением следует присоединить граничные условия на граничном контуре срединной плоскости пластинки (15), (16).

Если в системе уравнений (27)-(29) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. будем считать выполненными условия (17), получим основные уравнения микрополярных упругих пластин со стесненным вращением, когда вместо обобщенных кинематических гипотез Тимошенко примем обобщенные гипотезы Кирхгоффа:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-\tilde{p}_3,\quad \frac{\partial\left(L_{12}+M_{11}\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(L_{22}+M_{21}\right)}{\partial x_2}-N_{13}=-\tilde{m}_2-h\tilde{p}_1,$$

$$\frac{\partial\left(L_{11}-M_{12}\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(L_{21}-M_{22}\right)}{\partial x_2}+N_{23}=-\tilde{m}_1+h\tilde{p}_2, \tag{30}$$

$$M_{12}-M_{21}=\frac{h^2}{3}\frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon}\left(\frac{\partial\tilde{m}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde{m}_2}{\partial x_2}\right)$$

физическо-геометрические соотношения

$$M_{11}=-\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),\quad M_{22}=-\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right),$$

$$M_{12}+M_{21}=-\frac{4\mu h^3}{3}2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},\quad L_{11}=4\gamma h\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},\quad L_{22}=-4\gamma h\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}, \tag{31}$$

$$L_{12}=2h\left[-\left(\gamma+\varepsilon\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right],\quad L_{21}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\gamma-\varepsilon\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right],$$

к которым следует присоединить следующие граничные условия (при $x_1=\text{const}$):

$$\left(M_{11}+L_{12}\right)=\int_{-h}^{h}\left(x_3p_1^*+m_2^*\right)dx_3,$$

$$N_{13}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(M_{12}-L_{11}\right)=\int_{-h}^{h}\left[p_3^*+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_3p_2^*-m_1^*\right)\right]dx_3. \tag{32}$$

Легко заметить, что систему уравнений (30), (31) можно привести к одному уравнению относительно прогиба $w(x_1,x_2)$:

$$D^*\Delta\Delta w=\tilde{p}_3+h\left(\frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde{p}_2}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{m}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde{m}_1}{\partial x_2}\right), \tag{33}$$

где

$$D^*=D+2h\left(\gamma+\varepsilon\right),\qquad D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}. \tag{34}$$

Уравнение (33) – это обобщенное на микрополярный случай уравнение изгиба пластин Софи Жермен-Лагранжа по классической теории упругости. Здесь D^* представляет собой цилиндрическую жесткость микрополярной пластинки, когда имеет место стесненное вращение, D – классическая жесткость пластинки.

Отметим, что модель микрополярной упругой пластинки со стесненным вращением (30)-(32) ранее построена в работах [13,14]. Асимптотическим методом эта модель построена в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек//Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of Plates and Shells: a short review and bibliography// Arch. Appl. Mech. Special Issue. Doi 10. 1007/s 00419-009-0365-3.
3. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости// ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
4. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости //Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С. 41-54.
5. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости //Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309-319.
6. Sargsyan S.H. Thermoelastisity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity // Journal of Thermal Stresses. 2009. V. 32. №8. P.791-818.
7. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН . 2010. Т. 435. №3.
8. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц //Физика твердого тела. 1960. Т.2. №7. С.1399-1409.
9. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т.28. Вып. 6. С.1117-1120.
10. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
11. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с.
12. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Периодич. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С.89-112.
13. Геворгян Г.А. Уравнения изгиба пластин моментной теории упругости //ПМ. 1966. Т.2 Вып.7. С.74-79.
14. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений //ПМ. Тр. Америк. общ-ва инжен.-мех. Сер. Е. 1964. Т.31. №4. С.149-150.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр.НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат.анализа и дифференц. уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна

E-mail: slusin@yahoo.com. Тел.: (091) 60 57 15

Поступила в редакцию 02.09.2010